Per què hi ha matemàtics que, no pas de mala gana, llegeixen sobre el temps

Matemàtica: un passatemps amb objectes inventats segons regles lliurement elegides? Els matemàtics entenen que es manegen idees. I la matemàtica té a veure amb la realitat. D'ambdós aspectes tracta aquesta contribució: de la modelització de processos reals i del treball matemàtic en els models.

URS KIRCHGRABER I URS RUF

Els homes han desitjat des de sempre poder preveure el futur. Hi ha una tradició que diu que els horòscops en els diaris de gran difusió contenen oportunitats. L'any 847 el matemàtic i astrònom Al-Khuwarizmi va ser cridat al llit del califa malalt. Ell compongué el seu horòscop i li profetitzà que viuria encara cinquanta anys. (Deu dies més tard va morir el califa.) El nom Al-Khuwarizmi, benemèrit en l'àlgebra, perdura en forma antiquada en la paraula *algorisme*. Avui a penes es troben matemàtics coneguts entre els astròlegs. Potser les preguntes, de les quals hom espera resposta fiable, s'han tornat més modestes. Tornarà a créixer l'any vinent el producte interior brut? Es pot planificar una volta per la muntanya o invitar a una festa en el jardí dintre de cinc dies?

Sovint els pronòstics resulten falsos. El que se'n burla, infravalora la pretensió que es proposa. Allò que és sorprenent no són els falsos pronòstics, sinó els que resulten vers. De fet, d'on traiem l'esperança de poder fer pronòstics correctes sobre qualsevol desenllaç? Òbviament, confiem en la nostra fantasia que desenvoluparà representacions aptes de processos reals. Si això, de fet, té lloc, no és pas sense reduccions dràstiques. Aquí la mesurabilitat és decisiva. Davant d'un procés ens representem una sèrie de magnituds característiques, les quals varien. Heus aquí un parell d'exemples. Els moviments dels cossos celestes en el nostre sistema planetari —dels planetes, de la Lluna i els planetoides— presenten un procés, que ha ocupat els homes des de l'antiguitat: les magnituds que varien són la posició i la velocitat dels cossos celestes. O bé el sistema del temps atmosfèric a tot el món. Aquí es tracta de com varien les temperatures locals, la pressió de l'aire i les velocitats dels vents. Finalment, el sistema mundial com fou investigat per D. i D. Meadows i J. Randers el 1972 (per encàrrec del Club de Roma) i el 1992. Aquí, demés de moltes altres magnituds, varien la població mundial, la producció industrial, la contaminació del medi ambient i el conjunt dels recursos naturals.

Què significa ara fer pronòstics sobre tals processos? La tasca científica que ens repta és la descripció dels desenvolupaments: com varien per un procés determinat les magnituds característiques? Donarà encara voltes la Terra al voltant del sol d'aquí a mil milions d'anys? Girarà encara aleshores la Terra una volta cada vint-i-quatre hores? Sobreviurà la humanitat encara dos-cents anys?

Matemàtica i processos reals. Una mirada històrica endarrera

Ja en la antiguitat s'intentà descriure els moviments dels planetes per mitjà de cercles que roden uns sobre altres. C. Ptolemeu (*ca.*87–165 dC) perfeccionà el sistema i aconseguí una precisió tan alta, que durà més de mil anys. En el segle XV N. Copèrnic (1473–1543) simplificà el sistema ptolemaic en passar de la descripció geocèntrica a la heliocèntrica. Al començament del segle XVII J. Kepler (1571–1630) volgué adaptar la versió copernicana de la teoria ptolemaica a les observacions de T. Brahe (1546–1601) que per al seu temps eren incomparablement precises. Al llarg d'aquest treball, que durant anys va requerir càlculs inimaginablement fatigosos, Kepler va descobrir les tres famoses lleis que porten el seu nom. Ell va emprar un objecte, l'el·lipse, per a descriure com els planetes es mouen al voltant del sol. Després que al llarg de segles la idea del moviment circular més que cap altra hagués inspirat els astrònoms —però alhora també els hagués esclavitzat— les descobertes de Kepler feren època. (En vida, certament, ell fou famós com a astròleg de primera línia —fins i tot ell!) On era l'astronomia després de Ptolemeu i Kepler? Mitjançant recursos diferents s'havien desenrotllat descripcions dels moviments dels planetes, que finalment havien aconseguit una precisió notable. La idea de descriure de manera purament fenomenològica processos dinàmics, és certament menys àmplia que el que es podria suposar. Per exemple, per a una descripció del processos del temps atmosfèric seria completament ineficaç.

Llei fonamental de la Mecànica. Un model matemàtic que obre camí

Ben passat mig segle el gran físic i matemàtic anglès I. Newton (1642–1727) descobrí que les lleis de Kepler són una conseqüència, més aviat senzilla d'un principi molt més general. La intuïció de Newton, que obria nous horitzons, fou que els moviments dels cossos celestes de la millor manera que es deixen descriure és microscòpicament. A diferència de Kepler, que a una òrbita planetària globalment observada feia correspondre l'objecte matemàtic ellipse, Newton va pensar localment i es va concentrar en les magnituds característiques del procés i en els seus increments. Ell postulà que els increments estan determinats per les magnituds característiques!

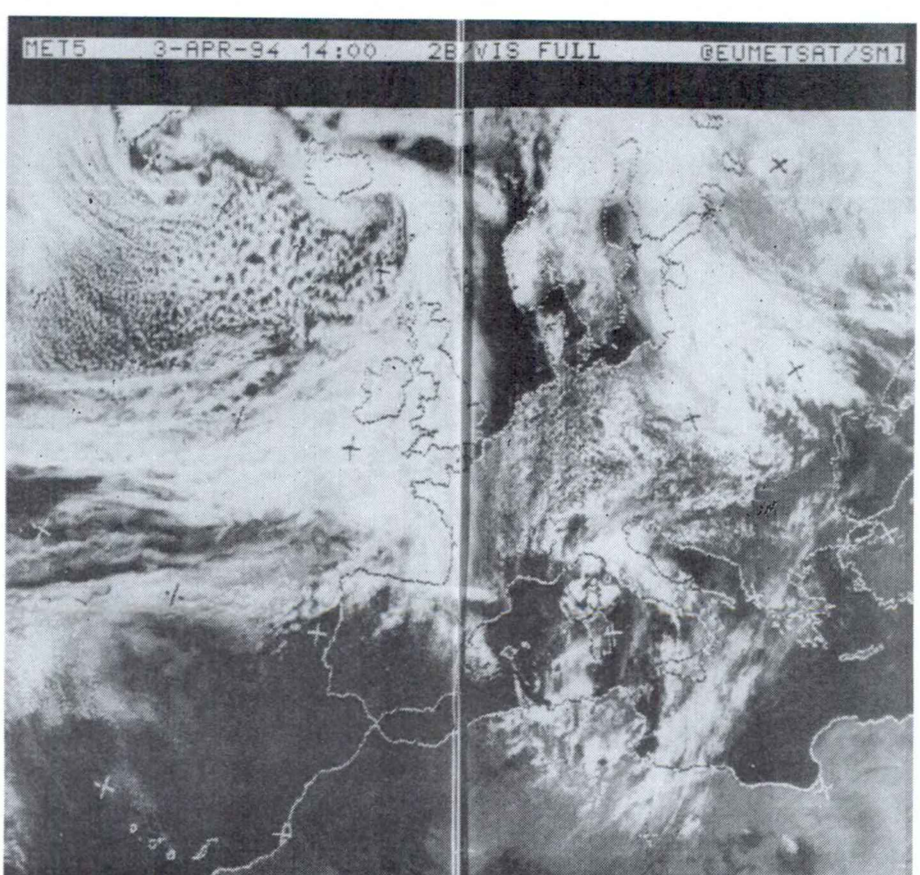
La seva llei fonamental de la mecànica enuncia: L'acceleració instantània d'un cos —o sigui l'increment de la seva velocitat— és proporcional a la força, que actua en aquell instant sobre ell, i aquesta depèn, si s'escau, de la posició i de la velocitat del cos. (Que els increments instantanis només depenguin dels valors instantanis de les magnituds del procés, no és evident de cap manera. Pensem només en les decisions humanes: aquestes no es prenen generalment basant-se solament en la situació present, sinó que són conseqüència d'històries enteres.) Amb la força de la gravetat, postulada simultàniament per ell, s'obté un nou i fonamental model per a la descripció de les òrbites planetàries. No obstant això, no sorgeix pas cap contradicció amb les lleis de Kepler: Si es consideren només dos cossos —el Sol i la Terra— s'obté precisament l'òrbita el·líptica de Kepler. Però, si es consideren endemés altres plantes, es mostra la força del principi newtonià: s'obtenen, amb comparació a Kepler, òrbites més complicades i que coincideixen d'una manera extraordinària amb les observades modernament.

Ben entès, ni Newton ni ningú podria o pot demostrar que els moviments dels planetes obeeixen radicalment el principi fonamental de Newton. (En virtut de la teoria de la relativitat d'Einstein, fins i tot estem obligats a dir que no ho fan!). La llei fonamental de la mecànica és un model matemàtic pels processos de moviment dinàmics. Les així anomenades lleis de la natura no són pas últimes i definitives veritats, sinó precisament models, és a dir, assaigs de descriure amb més o menys precisió i mitjançant entitats matemàtiques una part de la realitat. També el sistema ptolemaic i les lleis de Kepler són tals assaigs. Des d'aquest punt de vista no hi ha cap diferència de principi i important entre les teories dels moviments dels planetes de Ptolemeu, Kepler i Newton. Ara bé, la teoria de Newton està en tot d'acord, d'una manera extraordinària, amb les observacions exactes; i es distingeix per una molt més gran eficiència, és incomparablement més flexible i universal: permet d'abarcar un ample espectre de fenòmens de diversa naturalesa. La teoria de Newton —una creació humana d'alt encant estètic— ha esdevingut, de fet, el prototipus d'una teoria, la física. La descripció dels moviments dels líquids i dels gasos —fonament de l'aerodinàmica i de la meteorologia— dels camps electromagnètics, i dels processos de la física quàntica, són exemples de la formació de models segons aquesta mostra.

Pròpiament és una paradoxa. L'èxit de la formació de models matemàtics i la seva aplicació salta a la vista. Malgrat tot, hem de concedir que no comprenem per què els models matemàtics poden descriure processos reals. Sabem exactament com cau una poma, on es trobarà la Lluna dintre de mil anys i sobre quina òrbita vola una sonda cap a Mars, però no sabem el perquè. «Tot és nombre» deien els pitagòrics. Potser foren els primers que presentiren la importància de la matemàtica per a la descripció de la realitat. G. Galilei (1564–1642) afirmava triomfalment: «En el gran llibre de la natura, només hi pot llegir aquell que en coneix la llengua, en la qual aquest llibre està escrit, i aquesta llengua és la matemàtica». També el matemàtic alemany H. Neunzert, especialitzat en les aplicacions industrials, pensa d'una manera semblant quan ell qualifica la matemàtica com «clau de les tecnologies-clau». El físic americà E. Wigner pensava: «Que el llenguatge de la matemàtica sigui tan apropiat per a la formulació de les lleis fonamentals de la física, és un miracle, un regal meravellós, que ni entenem ni mereixem». El seu col·lega S. Weinberg certament subministra un complement interessant per a una imaginable explicació: suposant que una certa simplicitat serveix de fonament al món, li és apropiat un cert ordre. Un principal desig de la matemàtica és el descobriment i l'estudi de les formes d'ordre. Suposant que, de fet, només hi ha un cert nombre de formes de l'ordre, aleshores no resulta sorprenent que les estructures de les matemàtiques resultin apropiades per a la descripció de la física i àdhuc es comprèn que manta vegada els matemàtics aconsegueixin descobrir la matemàtica rellevant per a la física per endavant, és a dir, fins i tot abans que sigui necessària per a la física. Certament, la matematització no ha pas reeixit tant en totes les disciplines com en la física. La modelització dels processos dinàmics en la biologia o en l'economia, per exemple, és menys fiable. D'acord amb això, el model de D. i D. Meadows i J. Randers sobre el futur del món no queda pas lliure de controvèrsia.

Equacions diferencials. Un tema per als matemàtics dur de pelar

Després que en la primera part hem indicat com fou d'eficient la formació de models iniciada per Newton, considerem en aquesta segona part l'objecte matemàtic que Newton ha trobat per al seu propòsit. Ens referim a les *equacions diferencials*: equacions segons la mostra de la llei fonamental de la mecànica, ja mencionada. La investigació de les equacions diferencials és una de les tasques més interessants i exigents



Gràcies a la capacitat dels grans ordinadors es poden millorar els pronòstics del temps.

de la matemàtica. Es podria esperar que en els tres segles llargs des dels descobriments de Newton s'haguessin resolt els problemes més importants. Desgraciadament no és així. En primer lloc no pocs famosos matemàtics han resolt escollides equacions diferencials, d'una manera semblant a com es resolen a l'escola les equacions quadràtiques. La llista comprèn noms tan illustres com Leibniz, Euler, Gauss, Lagrange, Lord Rayleigh, Jacobi, Lie i d'altres. Però, sovint aquestes equacions diferencials no tenien cap importància pràctica; eren interessants només perquè se les podia resoldre per procediments enginyosos. Es tenia un notable instrument per a fer models matemàtics de processos reals, però sovint no es reeixia a resoldre les corresponents equacions. Aquesta discrepància astoradora no ha estat fins avui dia de cap manera superada.

Mètodes quantitatius de resolució

En principi hi ha dues classes de mètodes per a investigar equacions diferencials: els quantitatius i els qualitatius. En les recerques quantitatives, quan no es disposa de cap fórmula resolutiva, es determinen les solucions per aproximació. Una equació diferencial és un enunciat en petit, descriu la connexió entre les magnituds característiques d'un procés i els seus increments. Estableix com, partint d'un estat, es pot calcular la tendència al canvi. D'aquí es pot determinar aproximadament el curs del procés: del coneixement de l'estat en el moment actual, de l'estat inicial, es pot calcular la variació en el moment pròxim i d'aquí es pot obtenir l'estat següent; d'aquí, en resulta la variació en el moment després del pròxim, i també l'estat en el moment després del pròxim i així successivament. Per a aquests càlculs l'ordinador ofereix un mitjà insuperable. Aquestes aproximacions per ordinador són per a un viatge espacial tan indispensables com per al pronòstic diari del temps. Així i tot, el problema no queda pas liquidat. Puix, quant dura un moment: un dia, una hora, un milisegon...? El pròxim moment, de què tan lleugerament hem parlat, en realitat no existeix pas: sempre n'hi ha entremig un de més pròxim. També, el resultat és sempre només una aproximació; una aproximació, i aquí trobem la dificultat, de què no se sap com n'és de precisa. Pot ser, sense que ens n'adonem, tan dolenta, que resulti errònia i, per tant, sigui inútil.

Propietats qualitatives de les solucions

L'alternativa són mètodes qualitatius. Qui treballa en mètodes qualitatius es decideix a abordar el problema de les equacions diferencials des d'una altra posició. Descobreix que si només es vol obtenir una vista general del comportament d'un sistema, aleshores no és necessari descriure detalladament les solucions. La paternitat d'aquesta idea es deu al matemàtic francès Henri Poincaré (1854–1912). Ell reconegué que unes fórmules resolutives, àdhuc quan puguin ésser obtingudes, no són pas un valor digne de qualsevol esforç que calgui. Són molt més importants les propietats qualitatives o geomètriques de les solucions: d'una solució es vol saber si és creixent o periòdica (com $\sin x$), etc. L'estratègia de Poincaré era d'obtenir tals enunciats directament de l'equació diferencial. D'aquesta manera, obrí una nova perspectiva en el domini de les equacions diferencials. Amb un atac directe a les propietats essencials de les solucions, es poden estalviar la marrada per les fórmules resolutives, que generalment no es tenen a l'abast, i els càlculs amb ordinadors, que són insegurs; certament aquest procediment exigeix la sagacitat d'un Sherlock Holmes! Emprant una altra figura, hom es troba en el lloc d'un caricaturista que ha de dibuixar sobre el paper els trets típics d'una persona que ell desconeix completament. Poincaré va desenvolupar amb aquesta finalitat un conjunt de tècniques contundents.

Ara bé, de quina forma és un enunciat qualitatiu d'una solució d'una equació diferencial? Com es distingeix d'una descripció quantitativa? Això ha de ser aclarit mitjançant un exemple senzill: l'equació que descriu els moviments d'un pèndol. Els enunciats matemàtics que es poden obtenir sobre aquesta equació, ara els descriurem no pas mitjançant fórmules, sinó que els aclarirem en l'objecte físic pèndol. Per tant, parlarem del pèndol, però pensem en l'equació. Imaginem que el pèndol en el seu extrem superior està col·locat de tal manera que pot girar lliurement i sense fricció al voltant d'un eix a. Des d'un punt de vista qualitatiu es poden distingir cinc tipus de moviments:

– El pèndol pot estar penjat cap avall: està quiet (en una posició d'equilibri).

– Oscil·la, és a dir, es balanceja d'un costat a l'altre de la posició d'equilibri inferior. La màxima separació de la posició d'equilibri pot ser més gran o més petita.

– El pèndol gira, és a saber, gira durant tot el temps al voltant de l'eix de gir a, i naturalment, sempre en el sentit de les agulles del rellotge o sempre en el sentit contrari.

– La tija del pèndol està exactament vertical sobre l'eix de gir: el pèndol roman en la posició d'equilibri superior.

– El pèndol trepa cap a la posició d'equilibri superior i ho fa sempre més lentament: no cau cap endarrera ni tampoc arriba mai a dalt de tot. Aquest procés infinitament durador també ara pot ser en el sentit de les agulles del rellotge o en el sentit contrari.

També és interessant comparar ara les dues situacions d'equilibri. En la posició d'equilibri inferior, un petit cop donat al pèndol provoca una petita conseqüència: oscil·la dèbilment. L'equilibri és estable. Al contrari, si es guia el pèndol des de la posició d'equilibri superior o se li dóna un cop tan petit com es vulgui, la conseqüència és enorme: el pèndol oscil·la amb grans amplituds o fins i tot comença a girar. L'equilibri és inestable.

Aquests enunciats qualitatius donen un excel·lent resum sobre les solucions de l'equació diferencial del pèndol amb punt de sustentació fix. Però, moltes preguntes, que certament podrien ser d'interès, queden sense contestació. Quina és la duració del període d'oscil·lació en el cas d'una solució oscil·latòria? Com ha de ser de gran l'impuls perquè el pèndol giri i no oscil·li? On es troba exactament el pèndol en un moment determinat? Tals preguntes pertanyen al domini dels mètodes quantitatius. Poden ser contestades mitjançant les fórmules resolutives, que en aquest cas són a l'abast. Resulta molt diferent, alterant només molt poc el problema del pèndol. L'equació diferencial del pèndol amb un punt de sustentació fix passa a l'equació diferencial d'un pèndol, el punt de sustentació del qual oscil·la verticalment amb una petita amplitud. Per a aquesta equació no hi ha fórmules resolutives a l'abast. Al contrari, és possible una anàlisi qualitativa: aquesta mostra que el comportament del sistema és en certa manera impredictible. Si el pèndol gira en el sistema originari amb el punt de sustentació fix, gira sempre en el sentit de les agulles del rellotge o sempre en el sentit oposat. Per contra, en el sistema modificat el pèndol pot canviar el seu sentit de gir. Ara pot canviar i girar en el sentit de les agulles del rellotge i en el sentit contrari, i de tal manera que el nombre de voltes en cada un dels dos sentits és completament imprevisible! Què vol dir això en concret?

Impronosticabilitat d'un sistema sensible

Primer, representem-nos, encara una vegada més, la inestabilitat de la posició d'equilibri superior en el sistema originari amb el punt de suspensió fix. Una petita variació produeix amples oscil·lacions o fins i tot voltes del pèndol. És certament dramàtic, però no canvia res en la comprensió dels moviments possibles del pèndol en aquest sistema. Representem-nos un observador que segueix els possibles moviments i els descriu qualitativament portant-ne un protocol: si el pèndol va en el sentit de les agulles del rellotge i passa pel punt més baix, escriu una m (de *minus*); i si passa pel punt més baix en el sentit contrari al de les agulles del rellotge escriu una p (de *plus*). D'aquesta manera a cada moviment correspon una successió de m i p. En total, només es poden presentar exactament tres diferents protocols: la successió de m soles, la successió de p soles i la successió en què p i m alternen. Els protocols apareixen ben diferents quan es considera el sistema amb un punt de suspensió oscil·lant. L'anàlisi matemàtica demostra que, donada una successió arbitrària de m i p, aquesta pot ser obtinguda com a protocol. Per a un observador això significa: per molt de temps que ell segueixi el moviment del pèndol, per molt llarg que sigui el fragment de protocol de què disposa: si s'escau, ell no pot pronosticar quin serà el següent registre en el protocol! Per exemple, sigui $mpmmpppppmppmpmp$ el fragment de protocol, que es pot continuar de dues maneres, a saber, o amb una p o amb una m; doncs bé, per ambdues prolongacions hi ha un moviment corresponent. Si es consideren els deu registres següents, hi ha 2^{10} o sigui 1.024 possibilitats de continuar la successió de p i m, i de nou cada una d'elles pot ser realitzada.

La impronosticabilitat d'aquest sistema també es pot descriure d'una altra manera. Considerem dos moviments, els protocols dels quals coincideixen en un llarg fragment; d'això, es pot deduir que els seus estats inicials eren pròxims l'un a l'altre, i tant més pròxims com més llarga era la coincidència dels protocols. Considerantho a la inversa, això significa: petites variacions dels estats inicials tenen grans conseqüències. Es poden presentar dos pèndols, que al principi es mouen gairebé sincrònicament i després imprevisiblement —quan els seus protocols comencen a diferenciar-se— perden la sincronia i se separen. Des d'un punt de vista quantitatiu, se separen exponencialment l'un de l'altre. Es diu que el comportament d'aquest sistema és sensible. Com que els estats inicials mai no poden ser determinats o realitzats amb precisió infinita, el comportament a llarg termini d'un sistema sensible no és pronosticable.

Comportament caòtic

L'equació diferencial del pèndol amb punt de suspensió oscil·lant correspon certament a un sistema real i físic, però que no té pas una gran importància pràctica; és important perquè mostra que el comportament *caòtic* es pot donar fins i tot en sistemes senzills, i és important perquè mitjançant aquest exemple entenem completament l'índole de la inestabilitat i podem demostrar que té propietats caòtiques. A part d'això, exactament aquest mecanisme caòtic fou descobert ja per Poincaré al final del segle passat; però no fou fins els anys seixanta que el matemàtic americà S. Smale va crear el marc per a una teoria matemàtica satisfactòria.

El fenomen del comportament caòtic és astorador! Una equació diferencial descriu un procés determinístic: l'estat inicial determina el transcurs del procés per a tot el futur. Malgrat això, quan l'equació diferencial és sensible, el futur no és pronosticable. Aquesta asseveració, que al primer cop d'ull sembla contradictòria és un fonament de la fascinació de la qüestió del caos. Malgrat que el fonament del comportament caòtic fou descobert fa més de cent anys, el fenomen, àdhuc entre matemàtics, físics i naturalistes, no fou generalment conegut fins fa dues desenes d'anys. La revolució dels ordinadors amb la possibilitat de poder portar a terme enormes quantitats de càlculs i de poder representar gràficament els resultats en diferents formes, hi ha jugat un paper molt important. Molts sistemes han estat investigats: processos de fricció de rotors ràpids (interessen en la construcció de camps magnètics), sistemes de làser, el peculiar comportament orbital dels satèl·lits Janus i Epimeteu de Saturn, el caos en els corrents, el temps atmosfèric, només per anomenar alguns exemples. Però, els models matemàtics de processos reals són tan complicats, que demostracions matemàtiques per als comportaments caòtics, almenys actualment, semblen inabastables. Per contra, juguen un gran paper les simulacions amb ordinador: hi ha tota una sèrie de tests que sobre el fonament de càlculs voluminosos denoten la possibilitat de comportaments caòtics.

Simulació per ordinador de sistemes caòtics

Hom es pot meravellar de la importància dels càlculs amb ordinadors especialment en els sistemes caòtics. Ja que una calculadora només pot treballar amb un determinat nombre de xifres o posicions (per exemple 10 posicions), àdhuc una simple multiplicació de dos nombres no pot ser efectuada exactament, sempre es comet un error, d'arrodoniment. La simulació a llarg termini d'un procés dinàmic per ordinador exigeix moltíssimes addicions, multiplicacions, etc. Ara bé, en els sistemes sensibles, com hem vist, fins i tot un petit error, ja en l'estat inicial i després d'un temps curt, produeix una conseqüència catastròfica; què han de fer, aleshores, càlculs numèrics en els quals s'estan cometent errors contínuament? Suposem que A_t sigui el curs del procés que ens interessa i B_t la seva simulació obtinguda mitjançant l'ordinador. Si el procés en qüestió és sensible, la diferència entre B_t i A_t creix exponencialment al llarg del temps t, de manera que la simulació ofereix un bon pronòstic només si és a curt termini. Ara bé, resulta interessant que sota certes condicions es pot demostrar que hi ha un curs A_t del procés, el qual certament s'aparta exponencialment de A_t, però que corre sempre a la vora de B_t, a saber, la diferència entre B_t i A_t resta petita. O bé, emprant la metàfora del temps: Hi ha, en efecte, un temps que s'aproxima al pronosticat pels meteoròlegs, només que no és pas el que viurem!

Urs Kirchgraber és professor de matemàtiques a l'ETH de Zuric, i Urs Ruf és professor de llengua i literatura a l'Escola Cantonal de Zuric Oberland i professor encarregat a la Universitat de Zuric.